

Σενάριο

Κωνικές τομές (Έλλειψη)

Εκπαιδευτικός: Στέφανος Μακαριάδης ΠΕ 03

Γνωστική περιοχή: Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου – § 3.3

Θέμα:

Το προτεινόμενο σενάριο απευθύνεται σε μαθητές/τριες της Β' Λυκείου και αναφέρεται στο 3^ο κεφάλαιο, τις κωνικές τομές και στην παράγραφο 3.3.

Οι μαθητές εμπλέκονται με δραστηριότητες που αφορούν την κατασκευή σημείων σε έλλειψη. Η έννοια των κωνικών τομών, είναι από τις πιο απαιτητικές ενότητες στη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών Προσανατολισμού στην Β Λυκείου. Εισάγεται στο σχολικό εγχειρίδιο η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή ως οι τομές που δημιουργούνται στην επιφάνεια ενός κώνου από ένα επίπεδο κάθετο σε μια γενέτειρά του.

Η κατανόηση των εννοιών απαιτούν σύνθετες νοητικές λειτουργίες και απαιτούνται πολλές αναπαραστάσεις εννοιών και πρέπει να ενισχυθούν με πρόσθετα εργαλεία διδασκαλίας και τον σωστό καθοδηγητικό ρόλο του διδάσκοντα.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί στο εργαστήριο πληροφορικής με τη χρήση του λογισμικού Geogebra.

Σκεπτικό:

Βασική ιδέα:

Οι μαθητές με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας θα διερευνήσουν και θα ανακαλύψουν την έννοια των κωνικών τομών, με την βοήθεια της Γεωμετρίας και την κατασκευή σημείων που έχουν κάθε φορά μία χαρακτηριστική ιδιότητα (Γεωμετρικός Τόπος). Ποιο συγκεκριμένα αξιοποιώντας τη δυνατότητα του λογισμικού Geogebra και με τη δυνατότητα δυναμικής προσέγγισης (κίνηση σημείων και ίχνος που αφήνει το σημείο με την χαρακτηριστική ιδιότητα που το διέπει), οι μαθητές/τριες θα προσπαθήσουν να ανακαλύψουν και να διερευνήσουν τον τρόπο κατασκευή σημείων πάνω στις κωνικές τομές. Έτσι οι μαθητές/τριες θα ανακαλύψουν μία νέα έννοια βασισμένοι όμως σε γνωστές έννοιες γεωμετρίας και γεωμετρικών τόπων. Οι κινήσεις αυτές είναι δυνατόν να οπτικοποιηθούν και να γίνουν δυναμικές αν η διδασκαλία υποστηριχτεί στο λογισμικό Geogebra με υποστηρικτικά φύλλα εργασίας που βήμα - βήμα θα βοηθήσουν τους μαθητές/τριες να ανακαλύψουν τη γνώση.

Προστιθέμενη αξία:

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή - βελτίωση της στάσης των μαθητών/τριων απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Οι μαθητές/τριες αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα κάθε μαθητής/τρια μπορεί να δοκιμάσει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες και να καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν την ανάλογη κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και την επιστημονική τεκμηρίωση. Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να διευκολύνει σημαντικά προς αυτή τη κατεύθυνση. Η εργασία των μαθητών/τριων σε ομάδες και η στενή, συνεχής και συγκροτημένη συνεργασία μεταξύ των μαθητών/τριων της κάθε ομάδας προφανώς θα συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση.

Πλαίσιο εφαρμογής:

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές/τριες της Β΄ Λυκείου και αναφέρεται στο 3ο κεφάλαιο, τις κωνικές τομές και στην παράγραφο 3.3.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 3 διδακτικές ώρες. Η αξιολόγηση των μαθητών με ασκήσεις εφαρμογής πάνω στην νέα γνώση όπως και τεστ θεωρίας θα εφαρμοστούν από τους μαθητές στο σπίτι.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

Για τη διεξαγωγή του σεναρίου απαιτείται:

- Υπολογιστής ή τάμπλετ για κάθε δύο μαθητές.
- Το λογισμικό Geogebra.
- Τρία φύλλα εργασίας και ένα φύλλο εργασίας για αξιολόγηση.
- Κόλλες αναφοράς και στυλό.

Ως προς τα μαθηματικά:

Οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίζουν:

- Την μεσοκάθετη ευθεία σε ένα ευθύγραμμο τμήμα και την ιδιότητά της
- Τον γεωμετρικό τόπο
- Στοιχειώδη χειρισμό του προγράμματος Geogebra

Ως προς την τεχνολογία:

Οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιούν βασικές λειτουργίες του υπολογιστή.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Στους μαθητές θα δοθούν κατάλληλα φύλλα εργασίας που θα εκπονήσει ο διδάσκων και αναλυτικές οδηγίες (προφορικά ή γραπτά) για την υλοποίηση του σεναρίου.

Κοινωνική εννοχήστρωση της τάξης:

Οι μαθητές τις 3 ώρες εργαζόμενοι σε δυάδες και καθοδηγούμενοι από τον εκπαιδευτικό θα αναπτύξουν τις δραστηριότητες που θα οδηγήσουν στη σταδιακή ανακάλυψη της νέας γνώσης. Η αξιολόγηση θα γίνει στο σπίτι των μαθητών/τριων,

όπου καλούνται να εφαρμόσουν τη νέα γνώση και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις θεωρίας.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών/τριων, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Η επικοινωνία όλων των μαθητών/τριων της τάξης με τις εργασίες των συμμαθητών τους και η συλλογική διερεύνηση κρίσιμων παραμέτρων της μαθησιακής διαδικασίας μπορεί επίσης ενισχυθεί με κατάλληλη χρήση του διαδραστικού πίνακα σε διαφορετικές πτυχές της εφαρμογής των δραστηριοτήτων του σεναρίου.

Στόχοι:

Από την εφαρμογή του συγκεκριμένου σεναρίου οι μαθητές/τριες θα μάθουν να ανακαλύπτουν τη γνώση συνεργατικά, να πειραματίζονται, να παρατηρούν, να ανταλλάσσουν απόψεις και να διατυπώνουν εικασίες.

Επίσης με τη βοήθεια των προτεινόμενων εργαλείων δυναμικού χειρισμού (δρομείς, κίνηση σημείων και ίχνος που αφήνει το σημείο με την χαρακτηριστική ιδιότητα που το διέπει), θα προσεγγίσουν τους ορισμούς των κωνικών τομών και των ιδιοτήτων τους, προκειμένου να προκύψουν σωστά εποπτικά συμπεράσματα. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές/τριες μετά την ολοκλήρωση αυτής της διδασκαλίας:

1. Να ανακαλύψουν τον ορισμό της έλλειψης μέσω του γεωμετρικού τόπου.
2. Να ανακαλύψουν τις ιδιότητες που έχει η έλλειψη.
3. Να ανακαλύψουν την εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης.
4. Να ανακαλύψουν την Ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης.

Ανάλυση του σεναρίου:

1η διδακτική ώρα (Έλλειψη μέσω γεωμετρικού τόπου)

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων:

Αρχικά θα δοθούν κάποιες οδηγίες για τη χρήση του λογισμικού. Επίσης οδηγίες για τη χρήση δρομέων ή "σύρσιμο" του ποντικιού ή αυτόματη κίνηση ώστε οι μαθητές να διερευνήσουν τις δυναμικές κινήσεις των δρομέων, καθώς και η καταγραφή των αποτελεσμάτων σε ένα υπολογιστικό φύλλο.

Τα διαδραστικά εργαλεία και οι δυναμικές μεταβολές βοηθούν σε πολύ μεγάλο βαθμό τους μαθητές/τριες που έχουν μαθησιακές δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών στο μάθημα των Μαθηματικών. Με τη βοήθεια του προτεινόμενου λογισμικού, των διαδραστικών και δυναμικών εργαλείων και του ποντικιού, θα μπορούν να συμμετέχουν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία και θα μπορούν μόνοι τους να παρατηρήσουν και να κατανοήσουν τις έννοιες που αναφέραμε.

Οι μαθητές κατά την εκτέλεση αυτού του σεναρίου θα εμπλακούν στις παρακάτω δραστηριότητες:

Ζητείται από τους μαθητές/τριες να ανοίξουν το αρχείο με όνομα

«Γ.Τ(Έλλειψη).ggb» που βρίσκεται στο μάθημα Μαθηματικά Γ Λυκείου στο e-class.

Τους δίνεται το 1^ο φύλλο εργασίας.

Φάση 1^η : «Έλλειψη μέσω γεωμετρικού τόπου – Κατασκευή Ελλείψεων»

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1^ο

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ : 1)

2)

Φάση 1^η : (με χρήση των αρχείων «Γ.Τ(Έλλειψη).ggb», «Κατασκευή Έλλειψης»)

Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «Γ.Τ(Έλλειψη).ggb» και να

Διαβάσουν το Πρόβλημα Γεωμετρικού τόπου.

Πρόβλημα Γεωμετρικού Τόπου

Κατασκευή Έλλειψης ως Γεωμετρικός Τόπος σημείων Μ του επιπέδου:

Δίνονται:

1. Κύκλος με κέντρο Α και ακτίνα ρ.
2. Σημείο Β του κύκλου (Α,ρ).
3. Γ εσωτερικό σημείο του κύκλου (Α,ρ).
4. Μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ.
5. Ακτίνα ΑΒ του κύκλου (Α,ρ).
6. Μ σημείο τομής της ακτίνας ΑΒ και της μεσοκάθετου του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ.

Ζητείται:

Να βρεθεί ο Γεωμετρικός Τόπος των σημείων Μ του επιπέδου;

Οι μαθητές παρατηρούν το αρχείο geogebra όπου υπάρχουν κατασκευασμένα τα βήματα του προβλήματος.

Ο διδάσκων δίνει σε σχεδιαγράμματα τα βήματα, ώστε οι μαθητές/τριες να εμπλακούν κατασκευαστικά για την κατασκευή των βημάτων.

- Επιλέξτε ένα δρομέα και ονομάστε τον ρ. (min=0, max=5)
- Επιλέξτε ένα κύκλο με κέντρο Α και ακτίνα ρ.
- Επιλέξτε ένα σημείο Β του παραπάνω κύκλου.
- Επιλέξτε ένα σημείο Γ εσωτερικά του παραπάνω κύκλου.
- Φέρτε την μεσοκάθετη του ΒΓ.
- Φέρτε την ακτίνα ΑΒ του παραπάνω κύκλου.
- Ονομάστε Μ το σημείο τομής της μεσοκάθετης του ΒΓ με την ακτίνα ΑΒ

Λύση

Υπολογίστε το άθροισμα :

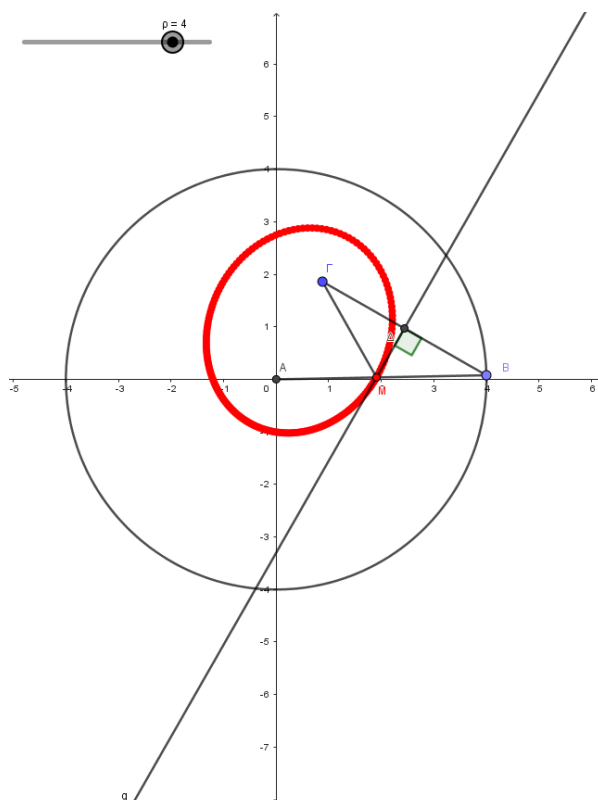
$$|MA + MG| = |MA + MB| = \rho = \text{σταθερό}$$

$$(MB = MG),$$

$$(MA + MB = \rho)$$

$$\text{Άρα : } |MA + MG| = \rho = \text{σταθερό}$$

Οπότε ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου είναι Έλλειψη με Εστίες τα σημεία A και Γ .



Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές/τριες να κάνουν δεξί κλικ στο σημείο M και να επιλέξουν ίχνος ενεργό και να κάνουν δεξί κλικ στο σημείο B και να επιλέξουν κίνηση ενεργή, τότε όσο κινείται το σημείο B πάνω στον κύκλο (A,ρ) το σημείο M θα αφήνει ένα ίχνος που κατασκευάζει μία έλλειψη με εστίες τα σημεία A και Γ , που είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου.

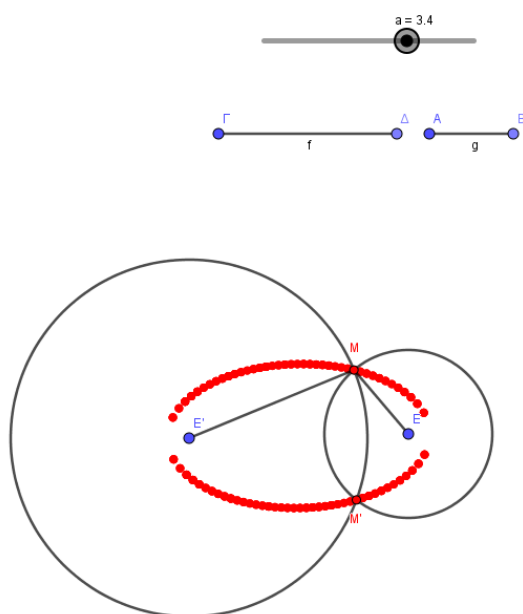
Ο εκπαιδευτικός δίνει τον ορισμό της έλλειψης:

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $E'E$. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως, με $2a$ και την απόσταση των εστιών E' και E με $2c$. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται εστιακή απόσταση της έλλειψης.

Κατασκευή Έλλειψης

(Γ.Τ των σημείων τομής δύο κύκλων με διαφορετικές ακτίνες):

Ζητείται από τους μαθητές/τριες να ανοίξουν το αρχείο «Κατασκευή Έλλειψης 1.ggb» και να διαβάσουν το 2^ο Πρόβλημα Γεωμετρικού τόπου.



2ος Γεωμετρικός Τόπος

1. Κατασκευή Δρομέα a με $0 \leq a \leq 5$
2. Κατασκευή Ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ με μήκος a
3. Κατασκευή Ευθύγραμμου τμήματος AB με μήκος $\max(a) - \Gamma\Delta$
4. Κατασκευή σταθερών σημείων E και E'
5. Κατασκευή κύκλου (E, AB)
6. Κατασκευή κύκλου $(E', \Gamma\Delta)$
7. Οι κύκλοι τέμνονται στα σημεία M και M'

Ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να κάνουν δεξί κλικ στα σημεία M , M' και να επιλέξουν ίχνος ενεργό και να κάνουν δεξί κλικ στον δρομέα a και να επιλέξουν κίνηση ενεργή, τότε όσο κινείται ο δρομέας a , τα σημεία M , M' θα αφήνουν ένα ίχνος που κατασκευάζει μία έλλειψη με εστίες τα σημεία E και E' , που είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου.

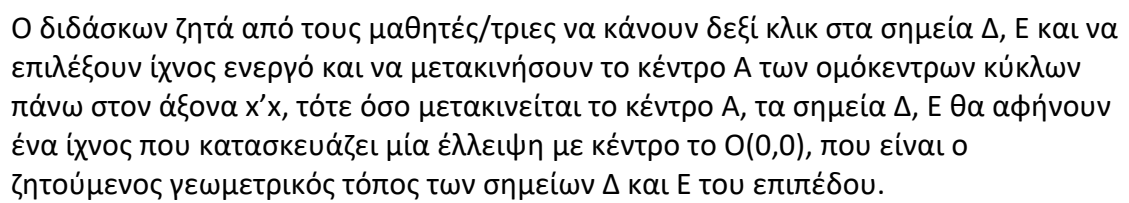
Κατασκευή Έλλειψης :

(Γ.Τ των σημείων τομής των δύο ακτινών ομόκεντρων κύκλων με τον μικρό κύκλο):

Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «Κατασκευή Έλλειψης 2.ggb» και να διαβάσουν το 3^ο Πρόβλημα Γεωμετρικού τόπου.

3ος Γεωμετρικός τόπος

1. Κύκλος με κέντρο A και ακτίνα ρ , το κέντρο A κινείται στον άξονα $x'x$.
 2. Κύκλος με κέντρο A και ακτίνα R , το κέντρο A κινείται στον άξονα $x'x$.
 3. Ισχύει $\rho < R$
 4. Σημεία B, Γ είναι σημεία τομής του άξονα $y'y$ και του κύκλου (A, R)
 5. Σημεία Δ, E είναι σημεία τομής των ακτινών του κύκλου (A, R) και του κύκλου (A, ρ)
- 1η περίπτωση ($\rho < R/2$)
Αν στα σημεία Δ και E ρυθμίσουμε ίχνος ενεργό και μετακινήσουμε το κέντρο A των κύκλων στον άξονα $x'x$ κατασκευάζεται οριζόντια έλλειψη με κέντρο $O(0,0)$.
- 2η περίπτωση ($R/2 < \rho < R$)
Αν στα σημεία Δ και E ρυθμίσουμε ίχνος ενεργό και μετακινήσουμε το κέντρο A των κύκλων στον άξονα $x'x$ κατασκευάζεται κατακόρυφη έλλειψη με κέντρο $O(0,0)$.
- 3η περίπτωση ($\rho = R/2$)
Αν στα σημεία Δ και E ρυθμίσουμε ίχνος ενεργό και μετακινήσουμε το κέντρο A των κύκλων στον άξονα $x'x$ κατασκευάζεται κύκλος με κέντρο $O(0,0)$.

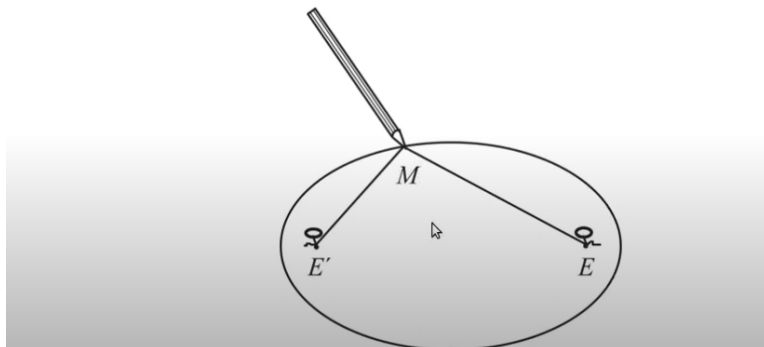


Στη συνέχεια ο διδάσκων καλεί τους μαθητές/τριες να κατασκευάσουν μία Έλλειψη πρακτικά με μολύβι, χαρτί, σχοινί και δύο πινέζες.
Οι μαθητές θα εμπλακούν πρακτικά στην κατασκευή της Έλλειψης.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Πρακτικά, μπορούμε να σχεδιάσουμε την έλλειψη ως εξής:

- ❶ Παίρνουμε ένα **σχοινί μήκους 2α** .
- ❷ Στερεώνουμε τα **άκρα** του στις εστίες E και E' .
- ❸ Με ένα **μολύβι**, διατηρώντας το **σχοινί τεντωμένο**,
- ❹ διαγράφουμε (κατά την **κίνησή** του) την έλλειψη.



Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει με τον προτζέκτορα του διαδραστικού πίνακα τον γεωμετρικό ορισμό της έλλειψης

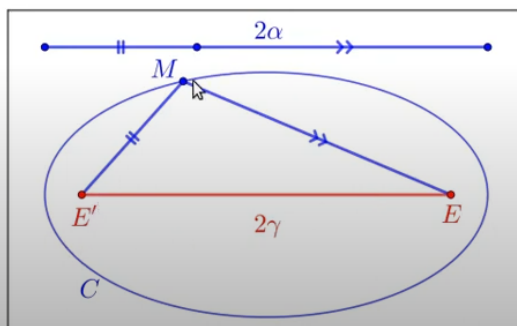
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Έλλειψη

είναι ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων M του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία E' και E αυτού είναι σταθερό (ίσο με 2α) και μεγαλύτερο του $E'E = 2\gamma$.

Συμβολικά:

$$C : d(M, E) + d(M, E') = 2\alpha > 2\gamma$$



Τελειώνοντας η 1^η διδακτική ώρα ο εκπαιδευτικός την 2^η διδακτική ώρα θα παρουσιάσει την ορολογία της έλλειψης, την αλγεβρική εξίσωση της έλλειψης και τις ιδιότητες της έλλειψης.

Τους δίνεται το 2^ο φύλλο εργασίας μαζί με κόλλες και στυλό.

Φάση 2η : «Ορολογία της έλλειψης - Εξίσωση έλλειψης - Ιδιότητες έλλειψης»

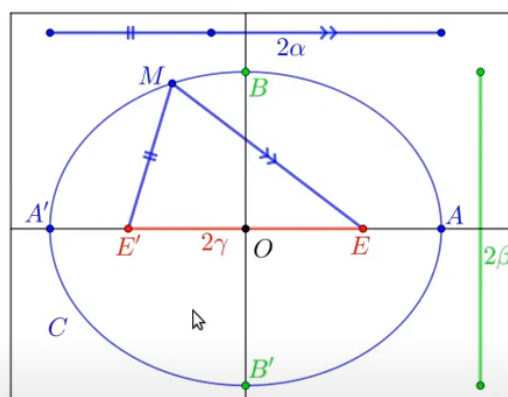
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2ο

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ : 1)
2)

Κατόπιν ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει με τον προτζέκτορα του διαδραστικού πίνακα την ορολογία της έλλειψης.

ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

- $E', E =$ εστίες
- $E'E = 2\gamma =$ εστιακή απόσταση
- $O =$ κέντρο (συμμετρίας)
- $A', A, B', B =$ κορυφές
- $A'A = 2\alpha =$ μεγάλος άξονας
- $B'B = 2\beta =$ μικρός άξονας
- $A'A, B'B =$ άξονες συμμετρίας



Προφανώς

- 1 $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $2\gamma < 2\alpha$
- 2 Αν $E' \equiv E$ τότε $\gamma = 0$ και έλλειψη $\equiv$ κύκλο (E, α)

Ο εκπαιδευτικός ρωτά:

- Πως λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του κύκλου και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου;

Αναμένεται οι μαθητές/τριες να απαντήσουν διάμετρος του κύκλου.

- Πως λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία της έλλειψης και διέρχεται από το κέντρο της έλλειψης;

Αναμένεται οι μαθητές/τριες να απαντήσουν διάμετρος της έλλειψης.

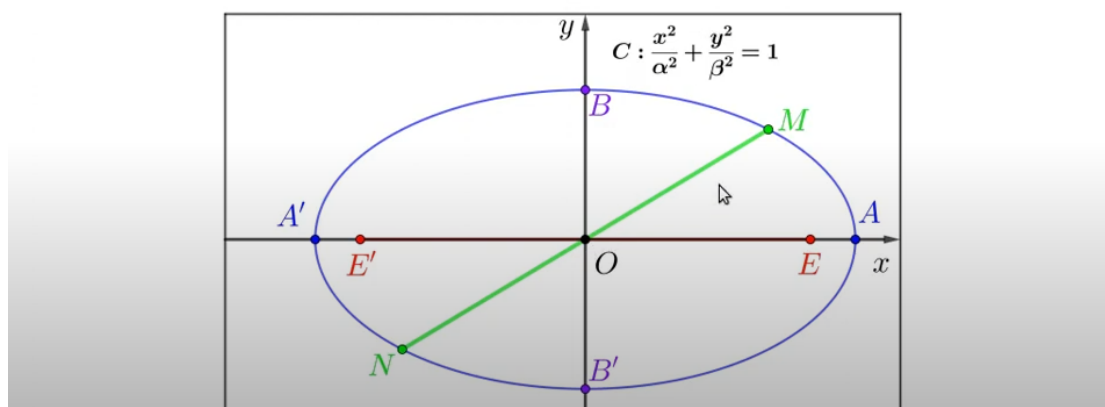
Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει με τον προτζέκτορα του διαδραστικού πίνακα τη διάμετρο της έλλειψης.

ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Διάμετρος Έλλειψης

είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία της έλλειψης και διέρχεται από το κέντρο της.

$$B'B = 2\beta \leq MN \leq 2\alpha = A'A$$



Στη συνέχεια της 2^{ης} διδακτικής ώρας ο εκπαιδευτικός θα παρουσιάσει στον προτζέκτορα του διαδραστικού πίνακα την αλγεβρική εξίσωση της έλλειψης με την απόδειξη της εξίσωσής της.

Εξίσωση Έλλειψης

• Έστω μια έλλειψη C με εστίες E' και E . Θα βρούμε την εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα των x την ευθεία $E'E$ και άξονα των y τη μεσοκάθετο του $E'E$.

Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης C , τότε θα ισχύει

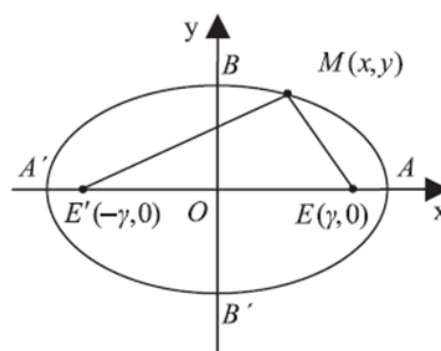
$$(ME') + (ME) = 2\alpha. \quad (1)$$

Επειδή $(E'E) = 2\gamma$, οι εστίες E' και E θα έχουν συντεταγμένες $(-\gamma, 0)$ και $(\gamma, 0)$ αντιστοίχως. Επομένως,

$$(ME') = \sqrt{(x + \gamma)^2 + y^2} \quad \text{και} \quad (ME) = \sqrt{(x - \gamma)^2 + y^2}.$$

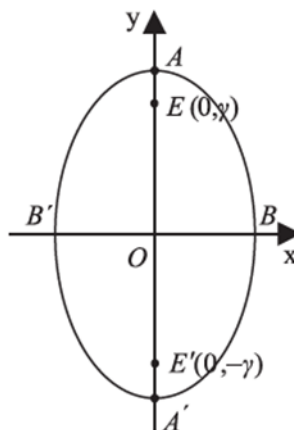
Έτσι, η σχέση (1) γράφεται

$$\sqrt{(x + \gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x - \gamma)^2 + y^2} = 2\alpha,$$



- Αν τώρα πάρουμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα των x τη μεσοκάθετο του $E'E$ και άξονα των y την ευθεία $E'E$ και εργαστούμε όπως πριν, θα βρούμε ότι η εξίσωση της έλλειψης C είναι

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \quad \text{όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$



Επομένως, η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$

Ο διδάσκων συνδέει τις κωνικές τομές (κύκλο και παραβολή), που παρουσιάστηκαν στο εργαστήριο πληροφορικής σε προηγούμενα μαθήματα, ώστε να προϊδεάσει τους μαθητές/τριες στο τι πρέπει να ανακαλύψουν στη συνέχεια στην έλλειψη.

Αναμένεται οι μαθητές/τριες να εμπλακούν στην διαδικασία ανακάλυψης των ιδιοτήτων της έλλειψης. Πράγματι ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «Έλλειψη.ggb» και να επιλέξουν τα κουτάκια (ορισμός, χαρακτηριστικά και ιδιότητες)

Τότε θα εμφανιστούν στο αρχείο έτοιμες κατασκευές που δείχνουν την έλλειψη, τα χαρακτηριστικά της και τις δύο βασικές ιδιότητες που έχει.

Ο διδάσκων για να εμπλέξει τους μαθητές/τριες σε κατασκευή όλων αυτών που παρατηρούν στο αρχείο, τους ζητά να ανοίξουν ένα κενό αρχείο geogebra και να κατασκευάσουν την έλλειψη από το μενού εργασίας με κατάλληλο εργαλείο κατασκευής έλλειψης.

Ο διδάσκων τους προτρέπει να βλέπουν την έτοιμη κατασκευή για να βοηθούν στα βήματα κατασκευής.

Ο διδάσκων περνά από τις δυάδες των μαθητών που χειρίζονται τον κάθε υπολογιστή και βοηθά δείχνοντας τους μαθητές/τριες που έχουν πρόβλημα.

Τελειώνοντας η 2^η διδακτική ώρα ο εκπαιδευτικός την 3^η διδακτική ώρα θα παρουσιάσει την εκκεντρότητα της έλλειψης, τις εξισώσεις εφαπτομένων στην οριζόντια και κατακόρυφη έλλειψη και την ανακλαστική ιδιότητα.

Τους δίνεται το 3^ο φύλλο εργασίας μαζί με κόλλες και στυλό.

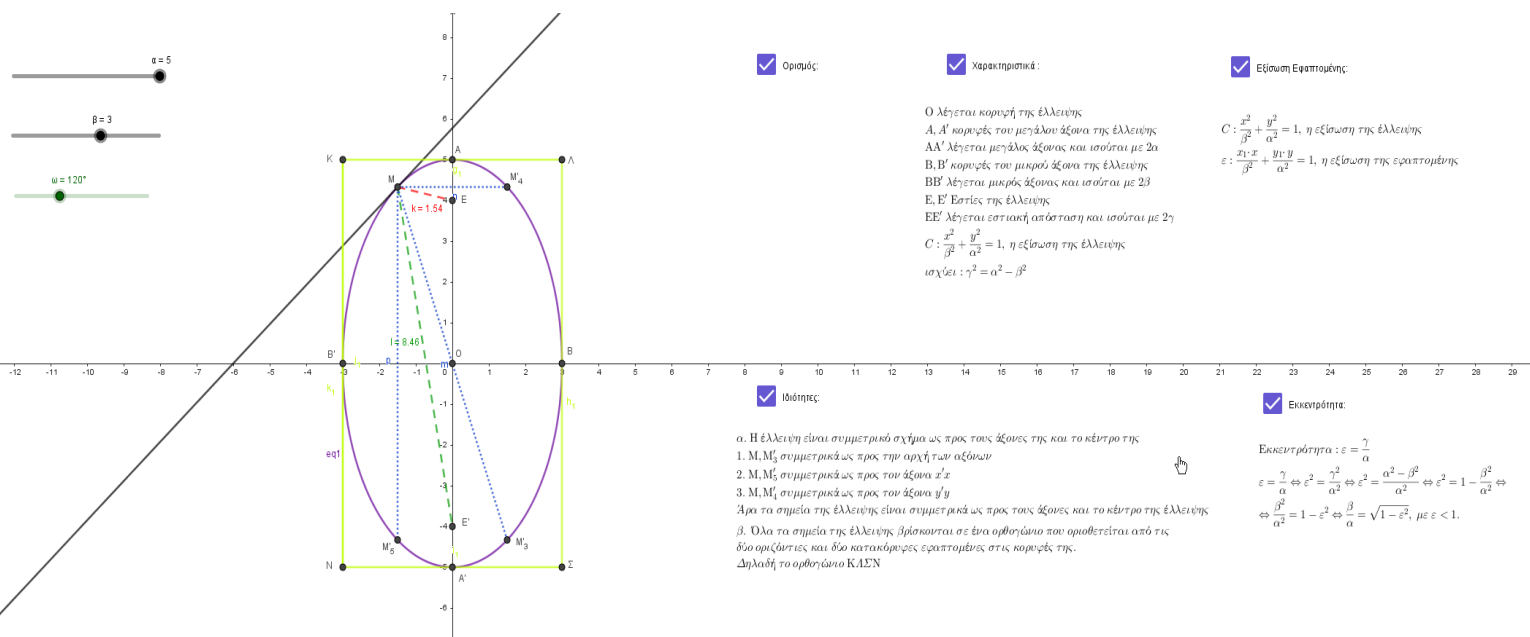
Φάση 3η : «Εκκεντρότητα της έλλειψης - οι εξισώσεις εφαπτομένων στην οριζόντια και κατακόρυφη έλλειψη και η ανακλαστική ιδιότητα»

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3ο

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ : 1)
2)

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές/τριες να ανοίξουν το αρχείο «Έλλειψη.ggb» και να επιλέξουν και υπολόιπα κουτάκια (εκκεντρότητα και εξίσωση εφαπτομένης)

Επισημαίνει στους μαθητές/τριες ότι η έλλειψη έχει μία επιπλέον ιδιότητα από τις προηγούμενες κωνικές τομές που ονομάζεται εκκεντρότητα και έχει εφαρμογές στην Αστρονομία και ειδικότερα στους Πλανήτες.



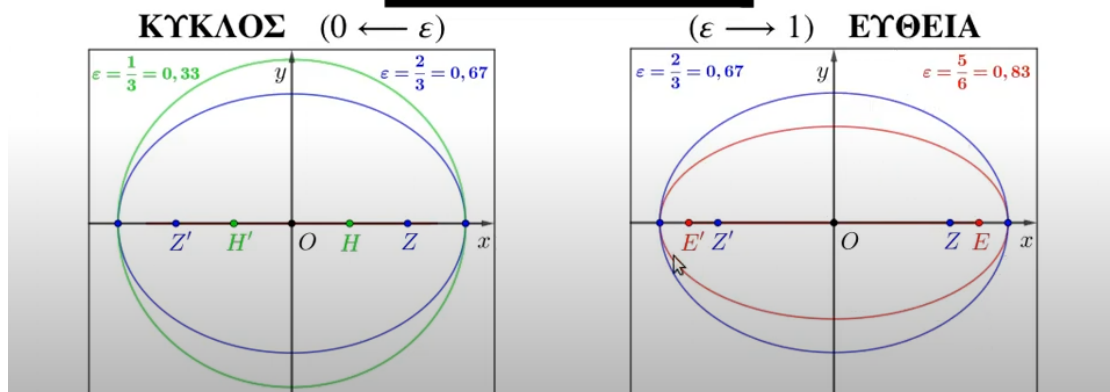
Παρουσιάζει στον προτζέκτορα του διαδραστικού πίνακα την εκκεντρότητα και τις εφαρμογές που έχει η ιδιότητα αυτή.

ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Εκκεντρότητα Έλλειψης

είναι ο λόγος της εστιακής της απόστασης προς το μήκος του μεγάλου άξονά της.

$$0 < \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$$



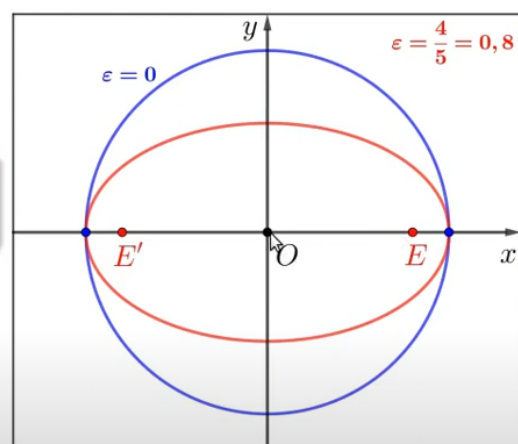
Δίνει τις ειδικές τιμές που μπορεί να πάρει η εκκεντρότητα

ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΚΥΚΛΟΥ

Εκκεντρότητα Κύκλου

Η έλλειψη γίνεται ο κύκλος (O, α).

$$\varepsilon = 0$$



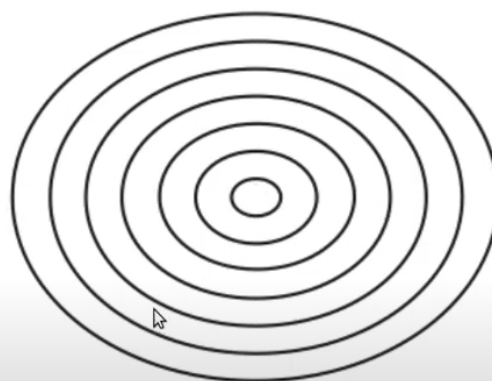
Δηλαδή, οι εστίες **ταυτίζονται** με το κέντρο του κύκλου.

Κατόπιν κάνει γνωστό στους μαθητές/τριες ότι οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα λέγονται όμοιες.

ΟΜΟΙΕΣ ΕΛΛΕΙΨΕΙΣ

Όμοιες Ελλείψεις

έχουν την **ίδια** εκκεντρότητα.



Αυτήν η ξεχωριστή ιδιότητα της έλλειψης, η εκκεντρότητα συνδέεται με τις κινήσεις των πλανητών, μια και οι κινήσεις τους είναι ελλείψεις.

ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΠΛΑΝΗΤΩΝ

Εκκεντρότητα Πλανητών

Οι **τροχιές** των πλανητών γύρω από τον ήλιο
είναι **ελλείψεις**,
των οποίων η **μία εστία** κατέχει ο ήλιος.

Πλανήτης	εκκεντρότητα	Πλανήτης	εκκεντρότητα
Ερμής	0,206	Κρόνος	0,051
Αφροδίτη	0,007	Ουρανός	0,046
Γη	0,017	Ποσειδώνας	0,005
Άρης	0,093	Πλούτωνας	0,250
Δίας	0,049		

Τέλος, ζητά να επιλέξουν το εργαλείο για την κατασκευή της εφαπτομένης μιας κωνικής τομής, από σημείο που θα επιλέγουν και κωνική τομή (την έλλειψη). Αναμένεται οι μαθητές να κατασκευάσουν και να επαληθεύσουν την εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης.

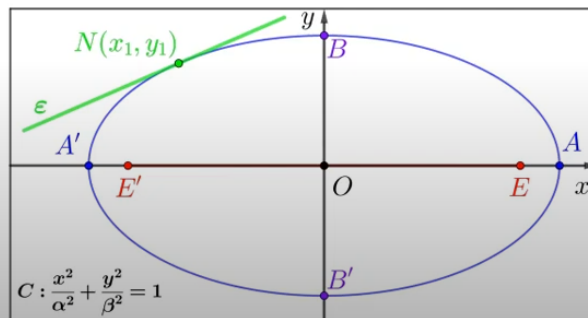
Παρουσιάζονται στον προτζέκτορα οι δύο μορφές των εξισώσεων εφαπτομένων.

1η ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

1η Εξίσωση Εφαπτομένης

- σε έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και
- σε σημείο $N(x_1, y_1)$ αυτής.

$$\epsilon : \frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

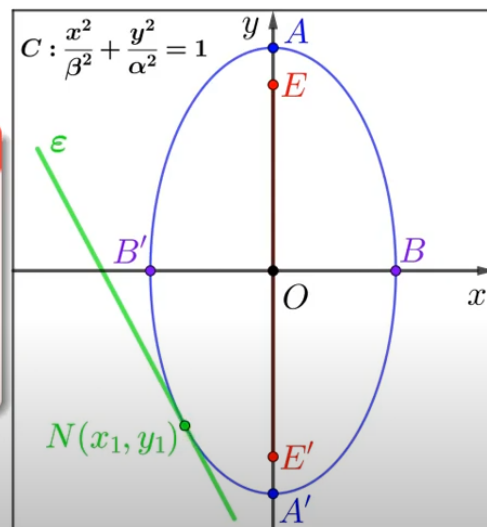


2η ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

2η Εξίσωση Εφαπτομένης

- σε έλλειψη $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ και
- σε σημείο $N(x_1, y_1)$ αυτής.

$$\epsilon : \frac{xx_1}{\beta^2} + \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$$



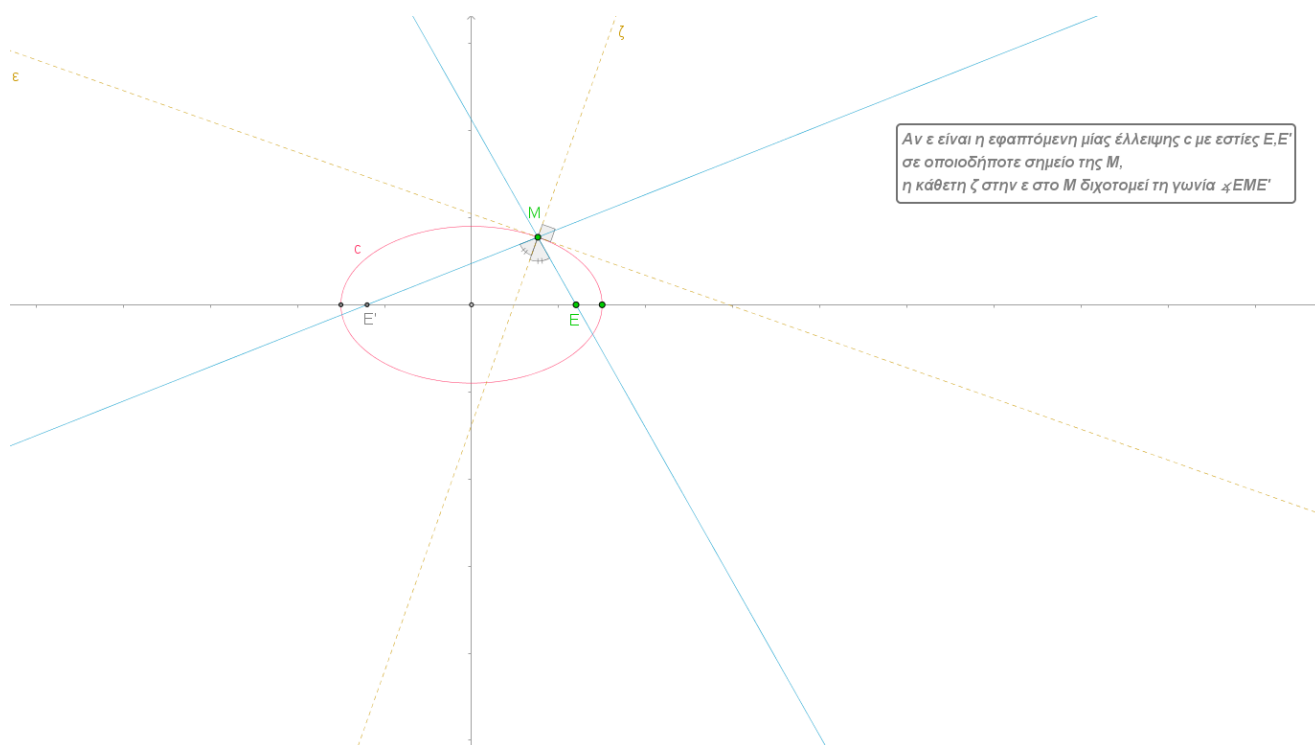
Τέλος, θα παρουσιαστεί μία ακόμη ιδιότητα της έλλειψης που βρίσκει εφαρμογές στην καθημερινή μας ζωή, είναι η ανακλαστική ιδιότητα.

Ανακλαστική ιδιότητα:

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζει το σημείο M με τα σημεία E και E' , όπου E, E' είναι οι εστίες της έλλειψης.

Απόδειξη της ιδιότητας με χρήση του geogebra:

Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «Ανακλαστική Ιδιότητα Έλλειψης.ggb» και να παρατηρήσουν το σχήμα.



Τους προτρέπει ο διδάσκων να μετακινήσουν το σημείο M με το ποντίκι και να παρατηρήσουν τις δύο γωνίες.

Αναμένεται οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι οι γωνίες παραμένουν ίσες μεταξύ τους.

Ο διδάσκων παρουσιάζει την ιδιότητα του φωτός που έχουν μάθει οι μαθητές/τριες στη φυσική.

Προσπαθεί να εξηγήσει την ανακλαστική ιδιότητα με γνώσεις περασμένων ετών.

ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Ανακλαστική Ιδιότητα

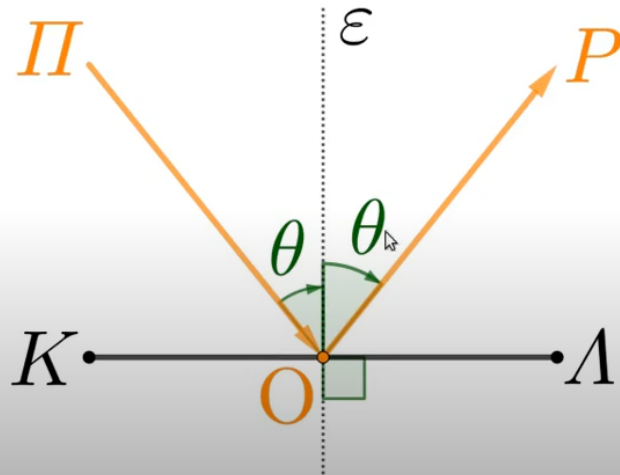
$$\text{Γωνία Προσπτώσεως} = \theta = \text{Γωνία Ανακλάσεως}$$

ΚΛ: επίπεδο κάτοπτρο

ε: ευθεία κάθετη στο ΚΛ

ΠΟ: ακτίνα φωτός που πέφτει στο ΚΛ

ΟΡ: ακτίνα φωτός που ανακλάται στο ΚΛ



ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Ανακλαστική Ιδιότητα Έλλειψης

$$\text{Γωνία Προσπτώσεως} = \theta = \text{Γωνία Ανακλάσεως}$$

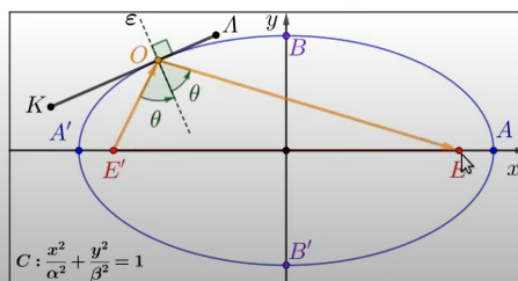
C: ελλειπτικό κάτοπτρο

ΚΛ: εφαπτομένη στο C στο O

ε: ευθεία κάθετη στην ΚΛ

Ε'Ο: ακτίνα φωτός που πέφτει στο C - ξεκινάει από την εστία Ε'

ΟΕ: ακτίνα φωτός που ανακλάται στο C - διέρχεται από την εστία Ε

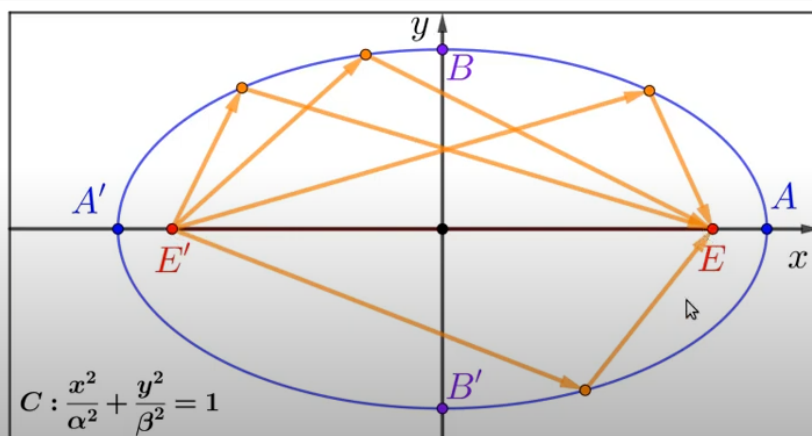


Που βρίσκει εφαρμογή η ιδιότητα αυτή στην καθημερινή ζωή μας ρωτά ο εκπαιδευτικός;

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΑΣ Ι

Στοές με Ειδική Ακουστική

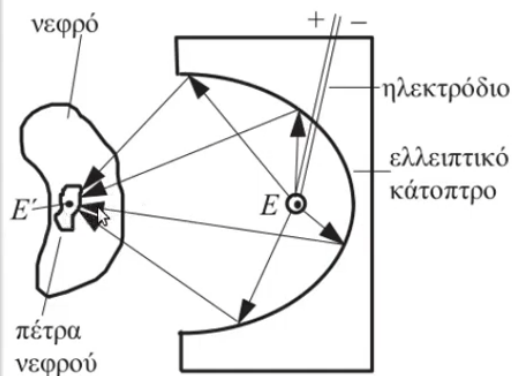
- Αίθουσες με ελλειπτική οροφή.
- Ένα πρόσωπο «ψιθυρίζει» στη μία εστία και
- «ακούγεται» στην άλλη εστία.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΑΣ ΙΙ

Λιθοθρυψία

- Στη μία εστία τοποθετείται ένα ηλεκτρόδιο εκπομπής υπερήχων.
- Ο ασθενής τοποθετείται σε τέτοια θέση, ώστε το νεφρό του να είναι στην άλλη εστία.
- Οι πέτρες του νεφρού κονιορτοποιούνται από τους ανακλώμενους υπερήχους.



Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές/τριες να συνδεθούν στον παρακάτω σύνδεσμο για να παρακολουθήσουν την ανακλαστική ιδιότητα.

<http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bg/207-kon3/101-2010-03-17-13-14-49>

Η αξιολόγηση των μαθητών/τριων θα γίνει στο σπίτι τους με το φύλλο αξιολόγησης.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4°

«Αξιολόγηση»

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ :

.....

1. Έστω η έλλειψη C με εστίες $E'(-3, 0)$, $E(3, 0)$ και το μήκος του μικρού άξονα είναι 8.
 - i. Να βρείτε το μήκος του μεγάλου άξονα της C .
 - ii. Να βρείτε την εξίσωση της C .
 - iii. Να βρείτε την εκκεντρότητα της C .

2. Έστω η έλλειψη C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εστίες στον άξονα $y'y$. Αν η C διέρχεται από το σημείο $M(1, \frac{10\sqrt{2}}{3})$ και έχει εκκεντρότητα $e = \frac{4}{5}$, να βρείτε:
 - i. την εξίσωση της C
 - ii. τις εστίες και τα μήκη των αξόνων της C .

3. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C που έχει κέντρο το σημείο O , εστίες στον άξονα $y'y$, εκκεντρότητα $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $A(\frac{1}{3}, 2\sqrt{2})$.

4. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:
 - i. $9x^2 + 16y^2 = 144$
 - ii. $9x^2 + y^2 = 9$
 - iii. $2x^2 + 3y^2 = 4$
 - iv. $x^2 + 12y^2 = 3$

5. Δίνεται η έλλειψη $C_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και η έλλειψη C_2 που είναι όμοια με την C_1 . Αν η C_2 έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(5\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, να βρείτε την εξίσωση της C_2 .

Επίσης οι μαθητές θα συνδεθούν στην κυψέλη του Ε-ΜΕ στον παρακάτω σύνδεσμο, όπου στον τοίχο της κυψέλης βρίσκεται η άσκηση σωστού – λάθους,

<https://e-me.edu.gr/groups/MATHSBKAT/wall>

όπου θα απαντήσουν 5 ερωτήσεις θεωρίας.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΜΑΔΑΣ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Β. ΓΕΩΡΓΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνος: ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΜΑΚΑΡΙΑΔΗΣ (Αλλαγή)

ΤΟΙΧΟΣ (Δημοσίωση)

Math

Math

Math

Νέα Ανάρτηση

✓

🔍

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΜΑΚΑΡΙΑΔΗΣ πριν από 4 λεπτά

📌 ...

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

📌 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

📌 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΨΗ

📌 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΨΗ

👍 0 💬 0 ⚡ 0

✎

Σχόλιο

✓

Επέκταση του σεναρίου:

Ως προς την επέκταση του σεναρίου μπορεί να προσαρμοστεί και να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία των υπόλοιπων κωνικών τομών.

Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου και εξετάζει του λόγους για τους οποίους κάποιοι δεν επιτεύχθηκαν ώστε να παρέμβει ανάλογα στο σενάριο.

Ως προς τα εργαλεία:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης:

Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δεν δούλεψαν καλά και προσαρμόζει το σενάριο.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα:

Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα όταν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

Σχεδίαση φύλλου εργασίας:

Στην ανάλυση του σεναρίου περιγράφονται οι επιμέρους δραστηριότητες με τις οποίες προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές καθώς και η χρονική σειρά με την οποία αυτό θα γίνει. Επομένως, η σύνταξη του φύλλου εργασίας από τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει το σενάριο πρέπει να συμπεριλάβει τις δραστηριότητες αυτές με την ίδια ροή και τις κατάλληλες ερωτήσεις – προβλήματα προς τους μαθητές.

Απώλεια διδακτικού χρόνου:

Σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να δημιουργηθεί ένα σχέδιο που θα επιτρέψει την επαναφορά της απώλειας διδακτικού χρόνου. Πρώτα από όλα, πρέπει να αναλυθούν οι ανάγκες των μαθητών και να καθοριστούν ποια θέματα είναι πιο σημαντικά. Μετά από αυτό, πρέπει να επανασχεδιαστεί το

σενάριο μαθήματος και να καθοριστούν οι δραστηριότητες που θα πραγματοποιηθούν στην τάξη.

Η χρήση τεχνολογιών, όπως το διαδικτυακό μάθημα, το ηλεκτρονικό βιβλίο ή η χρήση εκπαιδευτικών εφαρμογών και εργαλείων είναι μία άλλη εναλλακτική μέθοδος.

Επίσης, παρουσιάζοντας την ύλη της ενότητας σε μια λογική ακολουθία και δίνοντας έμφαση στις βασικές έννοιες και δεξιότητες.

Τέλος, ο εκπαιδευτικός πρέπει να αναλύσει την αποτελεσματικότητα του πλάνου του και να προσαρμόσει την προσέγγισή του στο σενάριο έκτακτης συνθήκης. Συνολικά, για να αντιμετωπίσει αποτελεσματικά την απώλεια διδακτικού χρόνου, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να έχει ένα σχέδιο δράσης που λαμβάνει υπόψη τις ανάγκες των μαθητών του.